SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Francesca Lacialfari

UN PROBLEMA AL CONTORNO PER UNA CLASSE DI OPERATORI QUASILINEARI DI TIPO FOKKER-PLANCK

13 giugno 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Sunto. In questa nota studiamo un problema al contorno per operatori quasilineari degeneri del secondo ordine del tipo seguente:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(x,t,u,\partial_1 u,\partial_2 u,...,\partial_{p_0} u)\partial_{ij} u + \langle x, BD_x u\rangle - \partial_t u$$

dove B è una matrice costante $N \times N$, $(x,t) = (x_1,...,x_N,t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ e $0 \le p_0 \le N$.
Sotto opportune ipotesi sui coefficienti a_{ij}, sul termine noto f e sull'aperto Ω, si determina un teorema di esistenza, in opportuni spazi hölderiani, di una soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f(z,u) & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial_r\Omega} = 0, \end{cases}$$

dove $\partial_r\Omega$ indica la frontiera regolare dell'aperto Ω, che definiamo come l'insieme dei punti del $\partial\Omega$ in cui è possibile trovare una opportuna funzione barriera.
Per fare questo si dimostra dapprima un teorema di esistenza e unicitá per il problema linearizzato associato e si applica successivamente un teorema di punto fisso in spazi di Fréchet.

Abstract. We consider a Dirichlet problem for quasilinear operators of the following type:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(x,t,u,\partial_1 u,\partial_2 u,...,\partial_{p_0} u)\partial_{ij} u + \langle x, BD_x u\rangle - \partial_t u$$

where B is an $N \times N$ matrix, $(x,t) = (x_1,...,x_N,t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ and $0 \le p_0 \le N$.
Under suitable hypotheses on the coefficients a_{ij}, on the function f and on the open set Ω, we shall prove the existence of a solution, in appropriate Hölder spaces, of the Dirichlet problem

$$\begin{cases} Lu = f(z,u) & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial_r\Omega} = 0, \end{cases}$$

where $\partial_r\Omega$ is the regular boundary of Ω, that is the subset of $\partial\Omega$ where we can define a suitable barrier function.
In order to prove this result, we first prove an existence and unicity theorem for the associated linearized problem, then we shall apply the Tychonoff theorem in Fréchet spaces .

§1. **Introduzione.** I risultati che presenterò in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con il prof. E.Lanconelli.

Siano Ω_0 un aperto limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$, $1 \le p_0 \le N$, $z=(x,t) \in \Omega_0$, $x=(x_1,\dots,x_N)$, B una matrice costante $N \times N$ della forma seguente:

$$\text{(H1)} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & B_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dove ogni B_j è un blocco $p_{j-1} \times p_j$ di rango p_j, $p_0 \ge p_1 \ge \dots \ge p_r$, $p_0 + p_1 + \dots + p_r = N$.

Fissata la matrice B e fissata una costante $\mu > 0$, indichiamo con $\mathcal{L}$ la classe degli operatori L_0 del tipo seguente:

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(z)\partial_{ij} + Y$$

tali che

$$\text{(H2)} \qquad \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{p_0} |\xi_i|^2 \le \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \le \mu \sum_{i=1}^{p_0} |\xi_i|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{p_0}$ e per ogni $z \in \Omega_0$.

Qui $Y = \langle x, BD_x \rangle - \partial_t$, $D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right)$ indica il gradiente nelle variabili spaziali e $\langle\ ,\ \rangle$ è il prodotto interno in $\mathbb{R}^N$.

Sia Ω un aperto contenuto in Ω_0 e sia $z_0 \in \partial\Omega$. Chiamiamo *barriera locale in* z_0 ogni funzione w definita, e di classe C^2, in un intorno V di z_0, e tale che

(*i*) $w > 0$ in $\overline{\Omega \cap V} \setminus \{z_0\}$

(*ii*) $w(z) \to 0$ per $z \to z_0$

(*iii*) $L_0 w(z) \le -1$ per ogni $z \in \Omega \cap V$ e per ogni $L_0 \in \mathcal{L}$.

Chiameremo *frontiera regolare di* Ω, e la indicheremo con $\partial_r\Omega$, l'insieme dei punti del $\partial\Omega$ in cui esiste una barriera locale.

Faremo inoltre la seguente ipotesi:

(H3) $\partial_r\Omega$ è un insieme di unicità, nel senso seguente :
Se u è una funzione di classe C^2 in Ω tale che

$$\begin{cases} L_0 u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ \limsup\limits_{z\to\zeta} u(z) \leq 0 & \text{per ogni } \zeta \in \partial_r\Omega \end{cases}$$

allora $u \leq 0$ in Ω.

Supponiamo infine:
(H4) esiste una successione di compatti $\{\Omega_p\}_{p\geq 1}$ tale che

$$\Omega_p \subset \overset{\circ}{\Omega}_{p+1},\ \Omega_p \subset\subset \Omega,\ \ dist\,(\partial\Omega_p, \partial\Omega_{p+1}) \sim \frac{1}{p^2},\quad \bigcup_{p=1}^{\infty} \Omega_p = \Omega.$$

La distanza utilizzata in questa ipotesi verrà precisata nel successivo paragrafo.

Vogliamo dimostrare un teorema di esistenza per un problema al contorno per i seguenti operatori:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(z,u,D_0u)\partial_{ij}u + Yu, \qquad \text{dove } D_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_{p_0}}\right),$$

dove i coefficienti $a_{ij} \in C^\gamma(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{p_0};B)$ per qualche $\gamma \in (0,1)$, e

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{p_0} |\xi_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(z,u,P)\xi_i\xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^{p_0} |\xi_i|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{p_0}$ e per ogni $(z,u,P) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{p_0}$.
Sia inoltre $f \in C^\gamma(\Omega\times\mathbb{R};B)$ tale che

$$(\mathrm{H}_f) \qquad \frac{f(z,p)}{p} \to 0 \quad \text{per} \quad |p| \to +\infty, \ \text{uniformemente su } \Omega.$$

Sotto queste ipotesi vale il seguente
TEOREMA 1. *Sia $\Omega \subseteq \Omega_0$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$ che soddisfa le ipotesi (H3) e (H4). Se $\alpha \leq \frac{2}{r(1-\gamma)}$, allora esiste una funzione $u \in C_{loc}{}^{2+\alpha\gamma}(\Omega;B)$ tale che*

$$\begin{cases} Lu(z) = f(z,u(z)) & \text{puntualmente in } \Omega \\ \lim\limits_{z\to\zeta} u(z) = 0 & \text{per ogni } \zeta \in \partial_r\Omega\ . \end{cases}$$

(Per le definizioni degli spazi C^γ, $C^{1,\alpha}$, $C^{2+\alpha\gamma}$ rimandiamo ai paragrafi successivi.)

La dimostrazione di questo risultato si basa su un teorema di esistenza per il problema lineare per operatori della classe $\mathcal{L}$ e sul seguente teorema di punto fisso :

TEOREMA DI TYCHONOV. (cfr. [P]). *Siano X uno spazio di Fréchet, D un suo sottoinsieme chiuso e convesso, e sia $T:D \to D$ un'applicazione continua. Se $T(D)$ è precompatto, allora esiste in D un punto fisso per T.*

§2. Richiami e preliminari. Su $\mathbb{R}^{N+1}$ definiamo la seguente operazione associata alla classe $\mathcal{L}$:

$$(x,t)\circ(\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t+\tau), \quad \text{dove } E(t) = exp(-tB^T).$$

Osserviamo che tale legge dipende solo dalla matrice B e non dipende dai coefficienti della parte del secondo ordine; si può dimostrare che $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ è un gruppo (cfr. [LP]). Inoltre esiste un gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ su $\mathbb{R}^{N+1}$ rispetto al quale ogni operatore $L_0 \in \mathcal{L}$ a coefficienti costanti risulta omogeneo di grado 2.
La dilatazione $D(\lambda)$ agisce nel modo seguente:

$$D(\lambda)(x,t) = (\lambda^{\alpha_1}x_1,\dots,\lambda^{\alpha_N}x_N,\lambda^2 t), \text{ dove}$$

$\alpha_1 = \dots = \alpha_{p_0} = 1, \alpha_{p_0+1} = \dots = \alpha_{p_0+p_1} = 3, \dots, \alpha_{p_0+\dots+p_{r-1}+1} = \dots = \alpha_{p_0+\dots+p_r} = 2r+1,$
ovvero

$$D(\lambda) = diag\,(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2)$$

essendo I_k la matrice identità $k\times k$.
Possiamo introdurre in $\mathbb{R}^{N+1}$ una seminorma omogenea di grado 1 rispetto al gruppo $(D(\lambda))_{\lambda>0}$:

$$\|(x,t)\| = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^{\frac{1}{\alpha_i}} + |t|^{\frac{1}{2}}$$

ed una quasidistanza

$$d(z,\zeta) = \|\zeta^{-1}\circ z\|.$$

Sotto le ipotesi (H1) e (H2), ogni operatore della classe $\mathcal{L}$ a coefficienti costanti risulta ipoellittico, poichè soddisfa la condizione di Hörmander:

(H) $\qquad$ *rank Lie* $(\partial_1,\dots,\partial_{p_0}, Y) = N+1$ $\quad$ in ogni punto di $\mathbb{R}^{N+1}$.

DEFINIZIONE 2. Una funzione $h : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ sarà detta *B-hölderiana di esponente $\gamma \in (0,1)$ in Ω_0* se

$$\sup_{z,\zeta\in\Omega_0} \frac{|h(z)-h(\zeta)|}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{\gamma}} < +\infty.$$

In tal caso scriveremo $h \in C^{\gamma}(\Omega_0; B)$.
Diremo che $h \in C^{\gamma}{}_{loc}(\Omega_0; B)$ se $h \in C^{\gamma}(\Omega'; B)$ per ogni compatto $\Omega' \subset \Omega_0$.

DEFINIZIONE 3. Scriveremo $h \in C^{2+\gamma}{}_{loc}(\Omega_0; B)$ se per ogni compatto $\Omega' \subset \Omega_0$ si ha

$\|h\|_{2+\gamma,\Omega';B} =$

$$= \sup_{\Omega'} |h| + \sum_{i=1}^{p_0} \sup_{\Omega'} \left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\right| + \sum_{i,j=1}^{p_0} \sup_{\Omega'} \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\right| + \sup_{\Omega'} |Yh| +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{p_0} \sup_{\Omega'} \frac{|\partial_{ij} h(z) - \partial_{ij} h(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{\gamma}} + \sup_{\Omega'} \frac{|Yh(z) - Yh(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{\gamma}} < +\infty.$$

Vale la seguente stima a priori interna:

TEOREMA 4. (cfr.[M], osservazione 5.2, pag.28). *Siano* $L_0 \in \mathcal{L}$, $f, a_{ij} \in C_{loc}{}^{\gamma}(\Omega_0; B)$ *per* $i,j = 1,\dots,p_0$, *con* $0 < \gamma < 1$. *Supponiamo inoltre che* $u \in C_{loc}{}^{2+\gamma}(\Omega_0; B)$ *sia tale che* $L_0 u = f$ *in* Ω_0. *Allora, per ogni* $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega_0$, *esiste una costante* $c > 0$, *indipendente da* u *e dipendente solo dalla* $dist(\partial\Omega', \partial\Omega'')$, *tale che*

$$\|u\|_{2+\gamma,\Omega'} \le c\,(\sup_{\Omega''} |u| + \|f\|_{\gamma,\Omega''}).$$

§3. Caso lineare. Supponiamo che i coefficienti $a_{ij} \in C^{\gamma}{}_{loc}(\Omega; B)$, $0 < \gamma < 1$, dove $\Omega \subseteq \Omega_0$ è un aperto che verifica l'ipotesi (H3).

DEFINIZIONE 5. Sia $f \in C_{loc}{}^{\gamma}(\Omega; B)$. Diremo che una funzione $u \in C_{loc}{}^{2+\gamma}(\Omega; B)$ è soluzione del problema di Dirichlet lineare (L_0)

$$\begin{cases} L_0 u(z) = f(z) & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial_r \Omega} = 0 \end{cases}$$

se $L_0 u(z) = f(z)$ puntualmente in Ω e se $\lim_{z \to \zeta} u(z) = 0$ per ogni $\zeta \in \partial_r \Omega$.

Poiché Ω soddisfa l'ipotesi (H3), con un procedimento standard si prova il seguente

TEOREMA 6. (Principio del massimo). *Sia* $u \in C_{loc}{}^{2+\gamma}(\Omega; B)$ *una soluzione del problema di Dirichlet* (L_0) *e sia* $f \in L^{\infty}(\Omega)$. *Allora esiste una costante* $c > 0$, *dipendente solo da* Ω *e dalla costante di ellitticità* μ, *tale che*

$$\sup_{\Omega} |u| \le c \sup_{\Omega} |f|.$$

TEOREMA 7. *Se* $f, a_{ij} \in C_{loc}{}^{\gamma}(\Omega; B) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $0 < \gamma < 1$, *e l'aperto limitato* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ *soddisfa l'ipotesi (H3), allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} L_0 u(z) = f(z) & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial_r \Omega} = 0 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione $u \in C_{loc}{}^{2+\gamma}(\Omega; B)$.

DIM. Siano $a_{ij}^{(\varepsilon)}$, $f^{(\varepsilon)} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{N+1})$ tali che $a_{ij}^{(\varepsilon)} \to a_{ij}$ e $f^{(\varepsilon)} \to f$ in $C^{\gamma}(\Omega')$ per ogni compatto $\Omega' \subset \subset \Omega$, e sia

$$L^{(\varepsilon)} = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}^{(\varepsilon)}(z)\partial_{ij} + Yu.$$

Si può fare in modo che $L^{(\varepsilon)} \in \mathcal{L}$ per ogni ε, quindi anche per questi nuovi operatori vale il principio del massimo. Per il teorema 8.4 di [M] il problema di Dirichlet "regolarizzato"

$$\begin{cases} L^{(\varepsilon)}u(z) = f^{(\varepsilon)}(z) \ \text{ in } \Omega \\ u_{|\partial_r\Omega} = 0, \end{cases}$$

ammette una soluzione $u^{(\varepsilon)} \in C_{loc}^{2+\gamma}(\Omega; B)$. Per il principio del massimo, tale soluzione è unica e, fissato comunque un compatto $\Omega' \subset \subset \Omega$, esiste una costante $c > 0$, indipendente da ε, tale che $\sup_{\Omega} |u^{(\varepsilon)}| \le c \sup_{\Omega} |f^{(\varepsilon)}|$; poichè $f^{(\varepsilon)} \to f$ uniformemente su Ω, esiste una costante $c > 0$, ancora indipendente da ε, tale che $\sup_{\Omega} |u^{(\varepsilon)}| \le c \sup_{\Omega} |f|$. Dunque la successione $\{u^{(\varepsilon)}\}$ è equilimitata su Ω. Dalle stime interne di [M] segue poi che le $u^{(\varepsilon)}$ sono equicontinue all'interno di Ω. Per il teorema di Ascoli esiste allora una sottosuccessione $u^{(\varepsilon_j)}$ uniformemente convergente a una funzione u sui compatti di Ω. Inoltre, applicando nuovamente le stime a priori, risulta $u \in C^{2+\gamma}_{loc}(\Omega; B)$.
Sia ora $z_0 \in \partial_r\Omega$. Per definizione di frontiera regolare esiste un intorno $V \in \mathcal{U}_{z_0}$ ed esiste una funzione $w_{z_0}(z)$ tale che

$$L^{(\varepsilon_j)}w_{z_0}(z) \le -1 \ \text{ in } V \cap \Omega \quad \text{per ogni } \varepsilon_j, \ w_{z_0}(z_0) = 0, \ w(z) > 0 \text{ per ogni } z \in V \setminus \{z_0\}.$$

Chiamiamo $\psi^{(\varepsilon_j)}(z) = u^{(\varepsilon_j)}(z) - Cw_{z_0}(z)$, dove C è una costante che sceglieremo nel seguito in modo opportuno. Risulta:

$$L^{(\varepsilon_j)}\psi^{(\varepsilon_j)}(z) = f^{(\varepsilon_j)}(z) - CL^{(\varepsilon_j)}w_{z_0}(z) \ge f^{(\varepsilon_j)}(z) + C \quad \text{per ogni } z \in \Omega \cap V.$$

Dunque, se $C \ge C_0 = 2 \sup_{\Omega \cap V} |f|$, si ha $L^{(\varepsilon_j)}\psi^{(\varepsilon_j)} \ge 0$ in $V \cap \Omega$.

Esaminiano ora $\partial(\Omega \cap V) = (\partial\Omega \cap V) \cup (\Omega \cap \partial V)$.
Su $V \cap \partial\Omega$ si ha $\psi^{(\varepsilon_j)}(z) = -Cw_{z_0}(z) \le 0$.
Su $\Omega \cap \partial V$ si ha $\psi^{(\varepsilon_j)}(z) \le C_0 + C \inf_{\partial V \cap \Omega} w$. Se prendiamo

$$C \ge max\left\{C_0, \frac{C_0}{\inf_{\partial V \cap \Omega} w}\right\}$$

risulta $\psi^{(\varepsilon_j)}(z) \le 0$ su $\partial(\Omega \cap V)$. Per il principio del massimo si ha allora $\psi^{(\varepsilon_j)} \le 0$ in

$\overline{\Omega \cap V}$, per ogni ε_j. Dunque:

$$|u^{(\varepsilon_j)}(z)| \leq C w_{z_0}(z) \quad \text{per ogni } z \in \Omega \cap V.$$

Poichè $u^{(\varepsilon_j)} \rightrightarrows u$ su ogni sottoinsieme compatto di Ω, in particolare ci sarà convergenza puntuale; fissato allora $z \in \Omega \cap V$, possiamo passare al limite per $\varepsilon_j \to 0$, ottenendo $|u(z)| \leq C w_{z_0}(z)$. Dunque $\lim_{z \to z_0} u(z) = 0$ per ogni $z_0 \in \partial_r \Omega$. Passando al limite puntuale in $L^{(\varepsilon_j)} u^{(\varepsilon_j)} = f^{(\varepsilon_j)}$ si ottiene inoltre $L_0 u(z) = f(z)$ in ogni punto di Ω. □

§4. Il caso quasilineare: dimostrazione del teorema 2. Introduciamo lo spazio

$$X = C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega;B) = \{u \in C_{loc}^{\alpha}(\Omega;B) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C_{loc}^{\alpha}(\Omega;B) \text{ per } i = 1,\dots,p_0\}.$$

Consideriamo l'operatore quasilineare L definito nell'introduzione.
L'ipotesi $a_{ij} \in C_{loc}^{\gamma}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p_0};B)$ per $i,j = 1,\dots,p_0$ va intesa nel senso seguente:

$$\sup_{\substack{(z,p,P) \\ (\zeta,q,Q)} \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p_0}} \frac{|a_{ij}(z,p,P) - a_{ij}(\zeta,q,Q)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{\gamma} + |p-P|^{\gamma} + |P-Q|^{\gamma}} < +\infty$$

e, analogamente, $f \in C^{\gamma}(\Omega \times \mathbb{R};B)$ significa:

$$\sup_{\substack{(z,p) \\ (\zeta,q)} \in \Omega \times \mathbb{R}} \frac{|f(z,p) - f(\zeta,q)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{\gamma} + |p-q|^{\gamma}} < +\infty.$$

Definiamo la seguente successione di seminorme su X:

$$\|u\|_p = \sup_{\Omega_p} |u| + \sum_{i=1}^{p_0} \sup_{\Omega_p} |\partial_i u| + \sup_{z,\zeta \in \Omega_p} \frac{|u(z) - u(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{\alpha}} + \sum_{i=1}^{p_0} \sup_{z,\zeta \in \Omega_p} \frac{|\partial_i u(z) - \partial_i u(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{\alpha}}.$$

Detti X_p i completamenti di X rispetto alle norme $\|\cdot\|_p$, si ha: $X = \bigcap_{p=1}^{\infty} X_p$. Infatti:
- sia $u \in X$. Allora $\sup_{\Omega_p} |u| < +\infty$ per ogni p, e inoltre $u \in C^{1,\alpha}(K;B)$, qualunque sia il compatto $K \subset\subset \Omega$, quindi in particolare sarà $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_p;B)$ per ogni p. Dunque $u \in X_p$ per ogni p.
- Sia ora $u \in X_p$ per ogni p. Se K è un qualunque compatto $\subset\subset \Omega$, esiste p tale che $K \subseteq \Omega_p$, quindi $u \in C^{1,\alpha}(K;B)$. Dunque $u \in X$.
Dai risultati sugli spazi numerabilmente normati (cfr. [GS]), segue che X è uno spazio metrico completo.

Fissata in maniera opportuna (che preciseremo in seguito) una successione crescente di costanti reali positive $\{M_p\}_{p \in \mathbb{N}}$, sia

$$D = \{ u \in X \mid \sup_{\Omega} |u| \leq M_0 \text{ , e } \|u\|_p \leq M_p \text{ per ogni } p\}.$$

D risulta un sottoinsieme convesso e chiuso di X.

Consideriamo il problema linearizzato (L_v)

$$\begin{cases} L_v u(z) = f(z, v(z)) & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Poichè $a_{ij} \in C^{\gamma}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p_0}; B)$ e $v \in D$, con un breve calcolo si trova che per ogni $K \subset \subset \Omega$ risulta:

$$|a_{ij}(z, v(z), D_0 v(z)) - a_{ij}(\zeta, v(\zeta), D_0 v(\zeta))| \leq [a_{ij}]_{\gamma} \, (1 + [v]^{\gamma}_{\alpha, K}) \, \|\zeta^{-1} \circ z\|^{\alpha\gamma}.$$

Dunque $a_{ij} \in C^{\alpha\gamma}{}_{loc}(\Omega; B)$. Analogamente $f(\cdot, v(\cdot)) \in C^{\alpha\gamma}{}_{loc}(\Omega; B)$.

Allora, per il teorema 7, esiste una ed una sola $u = T(v) \in C^{2+\alpha\gamma}{}_{loc}(\Omega; B)$ soluzione del problema (L_v).

Vogliamo dimostrare che:

(i) $T(D) \subseteq D$

(ii) T ha il grafico chiuso

(iii) $T(D)$ è precompatto.

Osserviamo che, poichè X è uno spazio metrico, da $(ii) + (iii)$ segue che l'applicazione T è completamente continua.

<u>Punto (i)</u>. È il punto cruciale della dimostrazione. Si tratta infatti di dimostare che si puó scegliere la successione $\{M_p\}$ nella definizione del convesso D in modo tale che $T(D) \subseteq D$.

Osserviamo innanzitutto che la condizione (H_f) implica che, fissato comunque un $\varepsilon > 0$, esiste una costante $c(\varepsilon)$, dipendente solo da ε, tale che

$$|f(z, p)| \leq c(\varepsilon) + \varepsilon |p| \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{R}, \text{ uniformemente su } \Omega.$$

Dunque, utilizzando anche il principio del massimo, se $u = T(v) \in C_{loc}{}^{2+\alpha\gamma}(\Omega; B)$ è la soluzione del problema linearizzato (L_v), risulta

$$\sup_{z \in \Omega} |T(v)(z)| \leq \sup_{z \in \Omega} |f(z, v(z))| \leq c(\varepsilon) + \varepsilon \sup_{z \in \Omega} |v(z)| \leq c(\varepsilon) + \varepsilon M_0.$$

Se scegliamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e $M_0 \geq 2\, c(\frac{1}{2})$, si ha $\sup_{\Omega} |T(v)| \leq M_0$.

Sia ora $\Lambda = \Delta_{p_0} + Y$. Poiché $u = T(v) \in C_{loc}{}^{2+\alpha\gamma}(\Omega; B)$, la funzione $g = \Lambda u \in C_{loc}{}^{\alpha\gamma}(\Omega; B)$. Allora (cfr. [RS], teorema 16 pag. 310) $u \in C_{loc}{}^{\alpha\gamma + \frac{2}{r}}(\Omega; B)$; poiché abbiamo fatto l'ipotesi che $\alpha \leq \frac{2}{r(1-\gamma)}$, risulta allora $u \in C_{loc}{}^{\alpha}(\Omega; B)$.

Se indichiamo con G_0 la soluzione fondamentale associata all'operatore Λ, le derivate $\partial_i u = \partial_i G_0 * g$, $i = 1, ..., p_0$, risultano anch'esse hölderiane su ogni Ω_p.
Inoltre le loro costanti di hölderianità si controllano con la norma $\| T(v) \|_{2+\alpha\gamma, \Omega_{p+1}}$.
Utilizzando nuovamente le stime a priori interne, si ottiene la seguente condizione per la scelta delle costanti $\{M_p\}$:

$$(p+2)^{4+\alpha\gamma}(1+M^{\gamma}{}_{p+3}) \leq M_p$$

Questa condizione è verificata se si prende, per esempio, $M_p = M^p \cdot M^{2^{p-1}}$, dove M è un'arbitraria costante > 1.

Punto (ii). Sia $\{v_n\}$ una successione in D, e sia $u_n = T(v_n)$ per ogni n; siano inoltre u, v tali che $\| u_n - u \|_p \to 0$ per $n \to +\infty$, per ogni p, $\| v_n - v \|_p \to 0$ per $n \to +\infty$, per ogni p. Vogliamo dimostrare che da questo segue $u = T(v)$.
$u_n = T(v_n)$ significa che u_n è soluzione del problema

$$\begin{cases} L_{v_n} u_n = f(z, v_n) & \text{in } \Omega \\ u_n \mid_{\partial_r \Omega} = 0. \end{cases}$$

Sia $z_0 \in \Omega$. Allora esisterà p tale che $z_0 \in \Omega_p$, e poichè $\| v_n - v \|_p \to 0$, avremo in particolare che $v_n \rightrightarrows v$ su Ω_p. Quindi $v_n(z_0) \to v(z_0)$.
Dalle stime interne di [M] si ha che esiste $w \in C^2(\Omega_p; B)$ tale che $u_n \rightrightarrows w$ su Ω_p.
Tenendo conto della continuità dei coefficienti a_{ij} e della funzione f, si ha quindi $L_{v_n} u_n(z_0) \to L_v w(z_0)$. Per l'unicità del limite risulta poi $u = w$ in ogni punto di Ω.
Sia ora $z_0 \in \partial_r \Omega$. Allora $u_n(z_0) = 0$ per ogni n, dunque $u(z_0) = 0$. Quindi $u = T(v)$.

Punto (iii). Abbiamo già visto al primo punto che $T(D) \subseteq D$, dunque se $\{u_n\} \subset T(D)$, $u_n = T(v_n)$, si ha $\sup_{\Omega} | u_n | \leq M_0$ per ogni n, p.
Dalle stime interne di [M] segue poi che le $\{u_n\}$ sono equicontinue su ogni compatto $\Omega' \subset \subset \Omega$, come anche le loro derivate fino al secondo ordine. Per il teorema di Ascoli esiste allora una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti di Ω a una funzione $u \in C_{loc}{}^2(\Omega)$. Dalle stime interne segue che $u \in X$. Dunque $T(D)$ è precompatto.

Possiamo allora applicare il teorema di Tychonov per affermare che il problema di Dirichlet quasilineare

$$\begin{cases} Lu = f(z, u) & \text{in } \Omega \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione $u_0 \in C_{loc}{}^{1,\alpha}(\Omega; B)$. Dalle stime a priori interne segue poi che $u_0 \in C_{loc}{}^{2+\alpha\gamma}(\Omega; B)$. Il teorema 1 è cosi dimostrato.

§5. Un esempio di $\partial_r\Omega$

Sia $L_0 \in \mathcal{L}$. Se $z_0 \in \partial\Omega$, sia $\nu = (\nu_1, ..., \nu_{N+1}) = (\nu_0, \nu_{N+1})$ la normale unitaria a $\partial\Omega$ in z_0. Chiamiamo $A(z)$ la matrice $(N+1)\times(N+1)$

$$A(z) = \begin{bmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dove } A_0(z) = (a_{ij}(z))_{i,j=1,...,p_0}.$$

Ricordiamo la classificazione dei punti della frontiera di Ω data da Fichera in [F]:

$$\Sigma_3 = \{x \in \partial\Omega \mid \langle A\nu, \nu\rangle \neq 0\}$$
$$\Sigma_2 = \{x \in \partial\Omega \setminus \Sigma_3 \mid \langle x, B\nu_0\rangle - \nu_{N+1} > 0\}$$
$$\Sigma_1 = \{x \in \partial\Omega \setminus \Sigma_3 \mid \langle x, B\nu_0\rangle - \nu_{N+1} < 0\}$$
$$\Sigma_0 = \{x \in \partial\Omega \setminus \Sigma_3 \mid \langle x, B\nu_0\rangle - \nu_{N+1} = 0\}.$$

Sia $z_0 \in \Sigma_3$. Allora esiste una palla $B(z_0 + r\nu;\ r)$ tale che $\overline{B(z_0+r\nu;\ r)} \cap \overline{\Omega} = \{z_0\}$, e la funzione $w(z) = exp\ (-Mr^2) - exp\ (-M\,|\,z - z_0 - r\nu\,|^2)$, con M sufficientemente grande, è una barriera a $\partial\Omega$ in z_0. Allora $\Sigma_3 \subseteq \partial_r\Omega$.

Sia ora $z_0 \in \Sigma_2$. Scriviamo $\nu = (\nu', \nu'') \in \mathbb{R}^{p_0} \times \mathbb{R}^{N+1-p_0}$, e analogamente $z = (z', z'')$. La condizione $\langle A\nu, \nu\rangle = 0$ implica che ν'=0. Dunque $\nu = (0, \nu'')$. Definiamo ora

$$\zeta_0 = z_0 + r^3\nu,\ d_r(z) = r^4\,|\,z'\,|^2 + |\,z''\,|^2,\ E(\zeta_0, r) = \{z \mid d_r(z - \zeta_0) \leq r^6\}.$$

Se esiste un $r > 0$ tale che l'ellissoide $E(\zeta_0, r) \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \setminus \Omega$, allora la funzione

$$w(z) = exp\ (-r^6) - exp\ (-d_r(z - \zeta_0))$$

è una barriera locale in z_0.

Bibliografia

[F] Fichera, *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine*, Accad.Naz. Lincei Mem.Cl.Sci.Fis.Mat.Nat. sez.1^ (8) **5** (1956), 1-30

[GS] I.M.Gel'fand-G.E.Shilov, *Generalized functions vol.2* , Academic Press 1968

[LP] E.Lanconelli-S.Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend.Sem.Mat.Univ.Pol.Torino **52** (1994), Partial Diff. Equations pp.29-63

[M] M.Manfredini, *Stime a priori e problema al contorno per una classe di operatori ultraparabolici*, Tesi di dottorato Univ.Bologna A.A.1994-95

[P] B.Pini, *Lezioni di Analisi Matematica di secondo livello*, CLUEB Bologna

[RS] L.P.Rothschild-E.M.Stein, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1977), 247-320